

Задачи.

①

7

~2.

Абст. зм. Компактен ли оператор $Ax(t) = x(0) + t^{2020} x(1)$

да, так как он является непрерывным.

~3.

Компактен ли оператор $Ax(t) = \frac{t^{2020}}{\sin t + 2} x(t)$

не будет. Р-ции $M = \{t^n\}$ $n \in \mathbb{N}$. Мн-во M -упр-мство. Пример-но $A(M) = \left\{ \frac{t^{n+2020}}{\sin t + 2} \right\}$ сходящееся

нормально и непрерывно функции $\Rightarrow$ у неё нельзя вывести равномерно сходящегося. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A(M)$ не является относительно компактным.

~7

Такое отображение не всегда имеет неподвижную точку. Пример $Ax: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$Ax = x + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ удовлетворяет условию

задачи, однако если $Ax = x$, то $\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, что невозможно

~11.

$\|Ax\| \leq \|x\|$. С другой стороны $\|Ax\| = \|x\|$ при $x_1 = 0$ ($x = (x_1, x_2, \dots)$), откуда $\|A\| = 1$.

Послед-но $x = (x_1, x_2, \dots)$ является собственным решением уравнения $Ax = \lambda x \Leftrightarrow$ когда она пропорциональна $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ Так как

$(1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in \ell_2 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$, но $\{|\lambda| < 1\} \subset \sigma(T)$ (2)

С другой стороны, числа $\lambda: |\lambda| > 1$ регулярны.

Т.о. множество $|\lambda| \leq 1$ является спектром оператора T . В силу замкнутости спектра.

~ 12.

Если $Tx = \lambda x$, то $x(t)(t-\lambda) \equiv 0$, поэтому $x(t) \equiv 0$ в силу непрерывности $x(t)$.

Значит нулевой спектр отсутствует.

При $\lambda \in [a, b]$ ядро оператора $T - \lambda E$ содержится в собственном н/ве $\{y(t) \in C[a, b], y(a) = 0\}$,

поэтому эти ядра образуют

отдельный спектр. При $\lambda \notin [a, b]$ оператор $R_\lambda(y) = \frac{y(t)}{t-\lambda}$ является обратимым, поэтому спектр всегда с интервалом $[a, b]$.

~ 10.

$$\text{Имеем } Ag(s) = (1-s) \int_0^s tg(t)dt + s \int_s^1 (1-t)g(t)dt$$

Если функция $g \in L_2[0, 1]$ то $Ag \in C[0, 1]$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебеса. Т.к. оператор A задается собственным интегралом, то заданным ему порождают, но $Ag \in C^1[0, 1]$ при $g \in C[0, 1]$ имеем

$$(Ag)'(s) = \int_s^1 g(t)dt - \int_0^s t \cdot g(t)dt$$

Аналогично получаем, что если $g \in C^1[0, 1]$ то $Ag \in C^2[0, 1]$ и $(Ag)''(s) = -g(s)$

(3)

Р-ммы теперь ур-ние $AF = \lambda F$ Согласно сказанному выше, $f \in C^2[0,1]$ и

$$\lambda f''(s) + f(s) = 0$$

Учитывая что все решения ур-ния

$$AF = \lambda F \text{ удовн. условиям } f(0) = f(1) = 0$$

получаем, что ур-ние $AF = \lambda F$ имеетненулевые решения $\Leftrightarrow \lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$ $k \in \mathbb{N}$ и длялюбого λ решения пропорциональны функции

$$f_k(x) = \sin(\pi k x)$$

~ 16.

Аналогично задаче ~ 11 получаем $\|A\| = 1$;мощный спектр совпадает с мн-вом $\{\frac{1}{k^2}\}$ $k \in \mathbb{N}$, собственные эк-ты, отвечающие значения $\frac{1}{k^2}$ пропорциональны вектору e_k ; норма о преобразование непрерывнаспектру. $\lambda \in K = \{\frac{1}{k^2}\} \cup \{0\}$. При $\lambda \notin K$ оператор

$$R_\lambda(y) = \left\{ \frac{y_1}{1-\lambda}, \dots, \frac{y_n}{\frac{1}{n}-\lambda}, \dots \right\} \quad (y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\})$$

является ограниченным, м.к. $|R_\lambda(y)| \leq$

$$\leq \frac{\|y\|}{\rho(\lambda, K)}. \text{ Следовательно, спектр совпадает}$$

с мн-вом K .

~ 18.

Итак: равномерно ограничено по w ,
~~равномерно непрерывно~~ м.к. $|\sin(\pi w)| \leq 1$

Мн. во равномерно непрерывно, т.к. $\forall n \in \mathbb{N}$ (4)

$$|\sin(x_1 + n) - \sin(x_2 + n)| = 2 \left| \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_1 + x_2 + 2n}{2}\right) \right| \leq |x_1 - x_2|$$

~29.

Да. Такое мн. во не существует.

Существует мн. во $M \subset [a, b] : \mu(M) = b - a$.

С $M_1 = [a, b] \setminus M$, тогда $\mu(M_1) = 0$, $M_1 \neq \emptyset$

Т.к. $M_1 \neq \emptyset$ то $\exists x_0 \in M_1$, и окрестность

$U_\varepsilon(x) : M \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$ (можно считать, что $U_\varepsilon(x) \cap [a, b]$ или интервал, если $x \in (a, b)$

или полуинтервал, если $x = a, x = b$) В самом деле пусть $0 < \mu([a, b] \cap U_\varepsilon(x)) \leq \mu(M_1)$,

что противоречит лемме о непрерывности.

~27.

С $f(x)$ монотонно возрастаем и x_0 -

точка разрыва $f(x)$. Тогда где $b(x_0) =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \text{ и } a(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \text{ имеем}$$

$b(x_0) - a(x_0) > 0$. Интервалы $[a(x_0), b(x_0)]$ не пересекаются $\Rightarrow$ наименьший интервал не больше чем некоторое число

~26.

Да, можем. Например в $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$ мн. во $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где $M_n = \underbrace{(0, 1) \times \dots \times (0, 1)}_{n-1} \times (n, n + \frac{1}{n^2})$

Мн. во M - открытое, т.к. каждое из M_n открыто

(5)

$$\text{ЛЛЛ)} \mu(M) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \text{ и несравнимо}$$

~25

1) Кантинум: м-во содержит несчетное
функции $\Rightarrow$ мощность не меньше
кантинума. Также, непрерывные
функции однозначно задаются значения-
ми в рациональных точках, поэтому
мощность м-ва C -функций не больше
м-ва вещественных последовательностей,
значит не больше кантинума.

2) м-во имеет мощность континуума.
С одной стороны, м-во содержит
характеризующие функции все
подмножества отрезка $[0,1]$, поэтому
его мощность не меньше кантинума.
С другой стороны, в функции
однозначно задаются своим графиком
в $\mathbb{R}^2$, поэтому мощность не превосхо-
дит мощности множества всех
подмножеств $\mathbb{R}^2$, равной континуу-
мальной мощности $\mathbb{R}^2$ равномерно кверрану
 $[0,1] \times [0,1]$

~24

Представим м-ва A_1 и A_2 в виде.

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \quad A_2 = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$$

Предположим, что $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$, тогда
 $\mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus A_2)$, $\mu(A_2) = \mu(A_2 \setminus A_1)$ м-ва

⑥ $A_1 \setminus A_2$ и $A_2 \setminus A_1$ не пересекаются и содержатся в группе интервала $[0, 1]$, поэтому
 $\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) \leq 1$,
 что противоречит условию.

~ 23.

Возьмем $q, : q < q_1 < p$. Найдем наименьший интервал $[u, v]$ и ϵ , что $\mu([u, v] \cap E) \geq q$.

Введем функцию $f(x) = \mu(E \cap [x, v])$,
 $x \in [0, v]$. $f(x)$ - непрерывна и монотонно
 возрастающая $f(0) = 0$ $f(v) \geq q_1 > q \Rightarrow$ найдем
 $x_0 \in [0, v] : f(x_0) = q$. Искомое мн-во
 $E_q = E \cap [x_0, v]$, $\mu(E_q) = q$

~ 22.

1) $f(x)$ - монотонно непрерывная на
 интервале $[a, b]$. $\forall a \in \mathbb{R}$ мн-во $E_c = \{x : f(x) \leq c\}$
 - либо интервал либо полуинтервал, либо
 пустое $\Rightarrow E_c$ - замкнутое мн-во и
 $f(x)$ - непрерывна.

~ 21.

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, но не
 равны, то найдем $x_0 \in [a, b]$:

$f(x_0) \neq g(x_0) \Rightarrow \exists \mathcal{U}_\epsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < \epsilon : f(x) \neq g(x)\}$
 при $x \in \mathcal{U}_\epsilon(x_0) \cap [a, b]$. Но $\mu(\mathcal{U}_\epsilon(x_0) \cap [a, b]) > 0$.
 Но $\mu(\mathcal{U}_\epsilon(x_0) \cap [a, b]) > 0$.

④

стандартно посылно. ~ 15 $??/2$

~ 30 .

Т.к. м-во A - открыто, то его можно разбить в виде объединения не более чем сеченого числа непрерывных интервалов: $A = \bigcup_k (a_k, b_k)$.

Тогда $\mu(A) = \sum_k (b_k - a_k)$. Возьмем в каждом интервале (a_k, b_k) интервал (a'_k, b'_k) . Так как $b'_k - a'_k = (b_k - a_k) \frac{\beta}{\alpha} < b_k - a_k$. Показываем м-во $A_\beta = \bigcup_k (a'_k, b'_k)$

открыто и $\mu(A_\beta) = \sum_k (b_k - a_k) \frac{\beta}{\alpha} = \beta$

Решим задачу следующим образом:

$\gamma \in C[a, b]$, $K \in C([a, b] \times [a, b])$, $M = \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, s)| ds$

Определим $\mathcal{F}: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$

$$\mathcal{F}(x)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds + \gamma(t)$$

Легко видеть, что $\mathcal{F}$ сжимающее при $|\lambda| M < 1$

$\gamma, x_1, x_2 \in C[a, b]$. Тогда

$$\rho(\mathcal{F}(x_1), \mathcal{F}(x_2)) = \max_{t \in [a, b]} \left| \lambda \int_a^b K(t, s) (x_1(s) - x_2(s)) ds \right| \leq$$

$\leq |\lambda| M \rho(x_1, x_2)$. Показываем $\mathcal{F}$ сжимающее при $|\lambda| M < 1$

Перейдем к задаче

$$M = \max_{t \in [a, b]} \int_a^b \cos(t+s) = \sqrt{2}, \quad a=0, b=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

при $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\mathcal{F}$ -сжимающее

$$\rho(x, y) = (|x - y|)^{\frac{1}{3}}$$

Проверим аксиомы метрики.

$$1) \rho(x, y) = (|x - y|)^{\frac{1}{3}} = |y - x|^{\frac{1}{3}} = \rho(y, x)$$

$$2) \rho(x, y) \geq 0 \text{ ил. } |x - y| \geq 0$$

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$3) \rho(x, y) + \rho(y, z) = |x - y|^{\frac{1}{3}} + |y - z|^{\frac{1}{3}}$$

Возведем в куб.

$$\begin{aligned} & |x - y| + |y - z| + 3|x - y|^{\frac{2}{3}}|y - z|^{\frac{1}{3}} + 3|x - y|^{\frac{1}{3}}|y - z|^{\frac{2}{3}} \geq \\ & \geq |x - y| + |y - z| \geq |x - y + y - z| = |x - z| \end{aligned}$$

Т.к. при возведении в куб знак не меняется, то знак неравенства сохраняется.

$$\rho(x, z)^3 \leq (\rho(x, y) + \rho(y, z))^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ все аксиомы выполнены, $\rho(x, y)$ - метрика,
а последнее м-во метрическим нр-вом.

20.

Вспомогательная, если f задана вправо от точки $x = a$ дифференцируемым образом (метрика ρ $f(a + \Delta) = f(a) + \Delta f'(a)$), то можно

$$\varphi_n(x) = n |f(a + \frac{1}{n}) - f(a)|$$

Тогда $f'(x)$ является пределом среднй по последовательности непрерывных и, следовательно, непрерывных функций $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$, поэтому является непрерывной.

(10)

16.

Унитарный оператор u оператор $A \in L(l_2 \rightarrow l_2)$

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{2x_2}{3}, \frac{3x_3}{4}, \dots \right)$$

1) Нормы оператора

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x_k^2}{(k+1)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \right) = 1.$$

2) Спектр оператора ~~$x: Ax = \lambda x$~~
или $\lambda: Ax = \lambda x$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2} = \lambda x_1 \\ \frac{2x_2}{3} = \lambda x_2 \\ \dots \\ \frac{nx}{n+1} = \lambda x_n \end{cases} \Rightarrow \lambda_k = \frac{k}{k+1}; x_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

1 в k -ой позиции

Рассеянный спектр

$$G_p(A) = \left\{ \lambda_k = \frac{k}{k+1}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

3) Присоединяем $\lambda = 0$

$$\ker(A - \lambda E) = \ker(A) = \{e_1, \dots, e_k, \dots\} \neq \{0\} \Rightarrow \lambda = 0 \in$$

$$\in G_p(A)$$

Итак: 1) $\|A\| = 1$ 2) $G_p(A) = \{0, \lambda_k\}$, где $\lambda_k = \frac{k}{k+1}, k \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \cos^2(x) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x-t) f(t) dt \quad (1)$$

1) Попробуем предположить

$$\sin^2(x-t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x-2t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \cos(2t) -$$

$$- \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot \sin(2t) = 1$$

$$\rightarrow f(x) = \cos^2(x) + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt}_{C_1} - \frac{\lambda}{2} \cos 2x \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2t f(t) dt}_{C_2} - \frac{\lambda}{2} \sin(2x) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) f(t) dt}_{C_3}$$

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(t) + \frac{\lambda C_1}{2} - \frac{\lambda C_2}{2} \cos(2t) - \frac{\lambda C_3}{2} \sin(2t)) dt = \pi + \frac{\lambda C_1}{2} \cdot 2\pi - \frac{\lambda C_2}{2} \cdot 0 - \frac{\lambda C_3}{2} \cdot 0 = \pi + \lambda C_1 \pi$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x (\cos^2 t + \frac{\lambda C_1}{2} - \frac{\lambda C_2}{2} \cos 2t - \frac{\lambda C_3}{2} \sin 2t) dt = -\frac{\lambda C_2}{2} \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x (\cos^2 t + \frac{\lambda C_1}{2} - \frac{\lambda C_2}{2} \cos 2t - \frac{\lambda C_3}{2} \sin 2t) dt = -\frac{\lambda C_3}{2} \pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(1-\lambda\pi) = \pi \\ C_2(1+\frac{\lambda\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \\ C_3(1+\frac{\lambda\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{\pi}{1-\lambda\pi}$$

$$C_2 = \frac{\pi}{2+\lambda\pi}$$

$$\text{при } \lambda = -\frac{2}{\pi}$$

$$C_3 = C = \text{const}$$

$$C_1 = \frac{\pi}{1+2} = \frac{\pi}{3}$$

$$C_2 \cdot 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{не определено}$$

$$\text{Пусть } \lambda \neq -\frac{2}{\pi}$$

$$C_3 = 0$$

$$C_1 = \frac{\pi}{1-\lambda\pi} \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{\pi}{2+\lambda\pi}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2(x) + \frac{\lambda}{2} \frac{\pi}{1-\lambda\pi} - \frac{\lambda}{2} \cos 2x \frac{\pi}{2+\lambda\pi} = \\ &= \cos^2(x) + \frac{\lambda}{2} \frac{\pi}{1-\lambda\pi} - \frac{\lambda}{2} \cos 2x \frac{\pi}{2+\lambda\pi} = \\ &= \cos^2(x) \left(\frac{2+\lambda\pi-\lambda\pi}{2+\lambda\pi} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{2\pi+\lambda\pi^2+\pi-\lambda\pi^2}{(1-\lambda\pi)(2+\lambda\pi)} \right) = \\ &= \cos^2(x) \cdot \frac{2}{2+\lambda\pi} + \frac{3\pi\lambda}{2(1-\lambda\pi)(2+\lambda\pi)} \end{aligned}$$

Ответ: при $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ не определено, при

$$\text{при } \lambda \neq -\frac{2}{\pi} \quad f(x) = \frac{2}{2+\lambda\pi} \cos^2(x) + \frac{3\pi\lambda}{2(1-\lambda\pi)(2+\lambda\pi)}$$

Уравнение с.з. и с.р. $x(t) = \int_0^{\pi} \cos(t+s) x(s) ds$ (12)

1) Попробуем предположить $x(t) = \cos(t) \int_0^{\pi} \cos(s) x(s) ds - \sin(t) \int_0^{\pi} \sin(s) x(s) ds$

2) Уравнение имеет вид $\varphi(t) = C_1 \lambda_1 \cdot \varphi(t) = \frac{1}{\lambda_1} A \varphi(t) = \mu A \varphi(t)$

$$\varphi(t) = \underbrace{\mu \cos(t) \int_0^{\pi} \cos(s) \varphi(s) ds}_{C_1} - \underbrace{\mu \sin(t) \int_0^{\pi} \sin(s) x(s) ds}_{C_2}$$

$$\Rightarrow C_1 = \int_0^{\pi} \cos(s) (\mu \cos(s) C_1 - \mu \sin(s) C_2) ds = \mu C_1 \int_0^{\pi} \cos^2(s) ds - \mu C_2 \int_0^{\pi} \sin(s) \cos(s) ds = \mu C_1 \frac{\pi}{2} - \mu C_2 \cdot 0 = \mu C_1 \frac{\pi}{2}$$

$$C_2 = \int_0^{\pi} \sin(s) (\mu \cos(s) C_1 - \mu \sin(s) C_2) ds = 0 - \mu C_2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 (1 - \frac{\mu \pi}{2}) = 0 \\ C_2 (1 + \frac{\mu \pi}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{2}{\pi} \Rightarrow C_2 = 0, C_1 = C = \text{const} \\ \mu_2 &= -\frac{2}{\pi} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = C = \text{const} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\pi}{2} & \lambda_2 &= -\frac{\pi}{2} \\ \varphi_1 &= \cos t & \varphi_2 &= \sin t \end{aligned} \quad \text{с.з. и с.р.}$$

(13)

$$f(x) = \cos(4x) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-t) f(t) dt$$

i) Разложим $\cos^2(x-t)$ в сумму

$$\cos^2(x-t) = \frac{1}{2} \cos(2x-2t) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2t =$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos 4x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(t) dt + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos 2x \cos 2t f(t) dt +$$

$$+ \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot \sin(2t) \cdot f(t) \cdot dt = \cos(4x) + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt}_{C_1} + \frac{\lambda}{2} \cos 2x$$

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2t f(t) dt}_{C_2} + \frac{\lambda}{2} \sin(2x) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) f(t) dt}_{C_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos 4x + \frac{\lambda}{2} C_1 + \frac{\lambda}{2} \cos(2x) C_2 + \frac{\lambda}{2} \sin(2x) \cdot C_3$$

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(4t) + \frac{\lambda}{2} C_1 + \frac{\lambda}{2} \cos(2t) C_2 + \frac{\lambda}{2} \sin(2t) C_3 \right) dt =$$

$$= 0 + \frac{\lambda}{2} C_1 (\pi + \pi) + \frac{\lambda C_2}{2} \cdot 0 + \frac{\lambda C_3}{2} \cdot 0 = \lambda C_1 \pi \Rightarrow C_1 (\pi \lambda - 1) = 0$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t) \left(\cos 4t + \frac{\lambda C_1}{2} + \frac{\lambda C_2}{2} \cos 2t + \frac{\lambda C_3}{2} \sin 2t \right) dt =$$

$$= 0 + \frac{\lambda C_1}{2} \cdot 0 + \frac{\lambda C_2}{2} \cdot \pi + \frac{\lambda C_3}{2} \cdot 0 = \frac{\lambda C_2 \pi}{2} \Rightarrow C_2 (1 - \frac{\pi \lambda}{2}) = 0$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) \left(\cos(4t) + \frac{\lambda C_1}{2} + \frac{\lambda C_2}{2} \cos(2t) + \frac{\lambda C_3}{2} \sin(2t) \right) dt =$$

$$= 0 + \frac{\lambda C_1}{2} \cdot 0 + \frac{\lambda C_2}{2} \cdot 0 + \frac{\lambda C_3}{2} \cdot \pi \Rightarrow C_3 (1 - \frac{\pi \lambda}{2}) = 0$$

Решим:

$$\text{Тип 1 } \lambda = \frac{2}{\pi} \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \neq 0, \quad C_3 = \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos 4x + \frac{\lambda}{2} \cos 2x \cdot C_2 + \frac{\lambda}{2} \sin 2x \cdot C_3 = \left\{ \lambda = \frac{2}{\pi} \right\} =$$

$$= \cos 4x + \frac{C_2}{\pi} \cos 2x + \frac{C_3}{\pi} \sin 2x$$

$$\text{Тип 2 } \lambda \neq \frac{2}{\pi} \quad \lambda \neq \frac{1}{\pi} \quad C_1 = \neq 0, \quad C_2 = C_3 = 0$$

$$f(x) = \cos 4x + \frac{\lambda}{2} \cdot C_1 = \cos 4x + \frac{C_1}{2\pi}$$

$$\text{Тип 3 } \lambda \neq \frac{1}{\pi} \quad \lambda \neq \frac{2}{\pi} \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

$$f(x) = \cos 4x$$

Суть и $f(x) \in C[0,1]$: ~ 28

1) $f([0,1]) = \mathbb{R}$.

Противоречие I теореме Вейерштрасса:
непрерывная на отрезке функция ограничена на нем, а $\mathbb{R}$ -неогр. им. во.

2) $f([0,1]) = (0,1)$

Противоречие II т. Вейерштрасса:

непр. на отрезке функция госен. абсолют. макс. и мин. значений.

3) $f([0,1]) = [-2,1] \cup [1,2]$

Т.с.с. им $\Rightarrow \exists a, b: a, b \in [0,1]$ и $f(a) = -1, f(b) = 1$.

На отрезке считаем $a < b$. Непрерывна на отрезке.

непр. на мал. отрезке $\Rightarrow f$ непр. на $[a, b]$.

По т. о промежуточных f есть $0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] : f(c) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ контр. утверждение $\odot$

Р-рши $\int_0^1 x^\lambda \sin(x^\beta) dx$ ~ 19 Сделаем замену $= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda+2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)^\beta dt$

при $\beta \leq 0$ при $\int_1^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda+2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right| dt \leq \int_1^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda+2}\right| dt$

но при $\lambda > -1$ сравним интеграл с абс. сходимо

при $\lambda > -1 \Rightarrow \exists$ интеграл неабс. и пока $\lambda \leq -1$

В задаче $\lambda = -\frac{4}{3} \leq -1$ и $\beta = -1 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нек. интеграл неабс. $\Rightarrow \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot x^{-\frac{4}{3}} dx$.

(15)

Р-мин. носим. носим $x_n(t) \sim \begin{cases} n, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2} \\ 0, & t > \frac{1}{n^2} \end{cases}$

$$\forall f \in L_2(0,1) \quad |(x_n, f)|^2 = \left| n \int_0^{\frac{1}{n^2}} f(t) dt \right|^2 \leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n^2}} 1 dt \cdot \int_0^{\frac{1}{n^2}} f^2(t) dt =$$

$$= 1 \cdot \int_0^{\frac{1}{n^2}} f(t) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \text{в силу абс. непр. носим}$$

интеграла Лебега.

Т.е. $x_n \rightarrow 0_t$ слабо

$$Ax_n = \frac{1}{t} \int_0^t x_n(t) dt = \begin{cases} n, & t \leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n^2 t}, & t > \frac{1}{n^2} \end{cases} \Rightarrow \|y_n\|_{L_2} \geq 1$$

или

Т.е. оператор A не компактен. и.к. не переводит слабо сж. носим. в носим. сж. носим. по норме, а значит не компактен.